

Étude numérique de la convection naturelle tridimensionnelle autour d'un cône de révolution incliné

Ulrich CANISSIUS^{1*}, François d'Assise RAKOTOMANGA² et Edouard ALIDINA²

¹Ecole Normale Supérieure pour l'Enseignement Technique (ENSET), Université d'Antsiranana, BPO, Antsiranana 201, Madagascar

²Laboratoire de Mécanique des Fluides et Systèmes Energétiques Appliqués (LMFSEA), Faculté des Sciences, Université d'Antsiranana, BPO, Antsiranana 201, Madagascar

*Correspondance, courriel : canissiusulrich@yahoo.fr

Résumé

Les auteurs résolvent numériquement, à l'aide de la méthode des différences finies, les équations de transfert, laminaires, tridimensionnelles, entre un cône de révolution isotherme incliné, et un fluide newtonien en écoulement vertical ascendant engendré par la convection naturelle. Dans la couche limite, les résultats concernant les champs adimensionnels des vitesses et des températures ainsi que les nombres de Nusselt et les coefficients de frottement, sont représentés graphiquement.

Mots-clés : *convection naturelle tridimensionnelle, couche limite tridimensionnelle, cône de révolution incliné, transferts d'impulsion et de chaleur, étude théorique.*

Abstract

Numerical study of the three-dimensional natural convection around an inclined cone of revolution

Authors numerically solving, using the method of finite differences, the transfer equations, laminar, three-dimensional, between inclined isothermal cone of revolution, and a newtonian fluid in vertical upward flow generated by the natural convection. In the boundary layer, the results concerning the adimensional velocity fields and temperatures as well as the Nusselt numbers and the friction coefficients, are represented graphically.

Keywords : *three-dimensional natural convection, three-dimensional boundary layer, inclined cone of revolution, momentum and heat transfers, theoretical study.*

Nomenclature

Lettres latines

a	diffusivité thermique du fluide, ($m^2.s^{-1}$)
Cf_u	coefficient de frottement méridien
Cf_w	coefficient de frottement azimutal
Cp	capacité calorifique massique à pression constante du fluide, ($J.kg^{-1}.K^{-1}$)
g	accélération de la pesanteur, ($m.s^{-2}$)
L	longueur de référence égale à la longueur de la génératrice du cône, (m)
Nu	nombre de Nusselt local
Pr	nombre de Prandtl
r	distance normale du projeté M d'un point P du fluide à l'axe de révolution du cône, (m)
S_x, S_φ	facteurs de configuration géométrique
T_∞	température du fluide loin de la paroi, (K)
T_p	température de la paroi, (K)
V_x	composante méridienne, ($m.s^{-1}$)
V_y	composante normale, ($m.s^{-1}$)
V_φ	composante azimutale, ($m.s^{-1}$)
x, y	coordonnées méridienne et normale, (m)

Lettres grecques

α	angle d'inclinaison, ($^\circ$)
φ	coordonnée azimutale, ($^\circ$)
ρ	masse volumique, ($kg.m^{-3}$)
θ_0	demi-angle au sommet du cône, ($^\circ$)
ν	viscosité cinématique, ($m^2.s^{-1}$)
λ	conductivité thermique, ($W.m^{-1}.K^{-1}$)
μ	viscosité dynamique, ($kg.m^{-1}.s^{-1}$)
β	coefficient d'expansion volumique, (K^{-1})

Indices/Exposants

$+$	grandeurs adimensionnelles
-----	----------------------------

1. Introduction

Diverses applications des transferts thermiques au voisinage des corps à symétrie de révolution ont suscité de nombreuses études aussi bien théoriques qu'expérimentales en raison de leurs importances dans des nombreux domaines technologiques (agroalimentaire, centrales thermiques, les capteurs solaires, les échangeurs, ...). Beaucoup de travaux ont été publiés sur la convection naturelle autour d'un cône de révolution vertical aussi bien que la paroi du cône soit uniforme ou non, qu'elle soit maintenue à une température constante ou soumise à un flux de chaleur. Merk et Prins [1] ont développé la relation générale sur les solutions d'un système axisymétriques d'un corps isotherme et abordé une étude de la convection naturelle thermique laminaire de type couche limite au voisinage d'un cône à surface lisse. Bapuji et al. [2] ont étudié le courant de la convection naturelle laminaire instable avec un cône vertical isotherme. Pop et Tsung Yen [3] ont étudié les effets de la compressibilité dans la convection naturelle laminaire autour d'un cône vertical et montré que les transferts thermiques pour un cône à paroi lisse sont supérieurs à ceux obtenus pour un cône à paroi ondulée, et plutard Siabdallah et al. [4] ont confirmé ce phénomène. S. Roy [5] a étudié ce transfert en convection naturelle autour d'un cône vertical mais avec un nombre très élevé de Prandtl. Ayant égard à tous ces travaux sur un cône vertical, l'étude des transferts thermiques autour d'un cône incliné, présente aussi un très grand intérêt. Récemment, F. A. Rakotomanga et al. [6] ont abordé l'étude de l'influence de l'angle d'inclinaison du cône sur les écoulements et les transferts thermiques entre la paroi et le fluide par convection forcée. Ils ont montré que l'accroissement de l'angle d'inclinaison atténue l'échange thermique entre la paroi et le fluide d'une part et engendre une légère augmentation de l'épaisseur de la couche limite d'autre part.

Le présent travail, dont l'objectif est d'analyser l'influence sur les transferts thermiques de l'angle d'inclinaison du cône et de son angle d'ouverture, concerne une étude numérique de la convection naturelle dans cette dernière. Les équations de conservation sont discrétisées à l'aide d'un schéma implicite aux différences finies. Les champs de vitesses et de températures, associés aux conditions aux limites, sont déterminés à partir de l'algorithme de Thomas.

2. Fondements théoriques

Le modèle physique considéré est constitué d'un cône de révolution de longueur L et incliné d'un angle α par rapport à la verticale. La paroi du cône est maintenue à une température constante T_p , différente de la température T_∞ du fluide loin de la paroi qui est également constante.

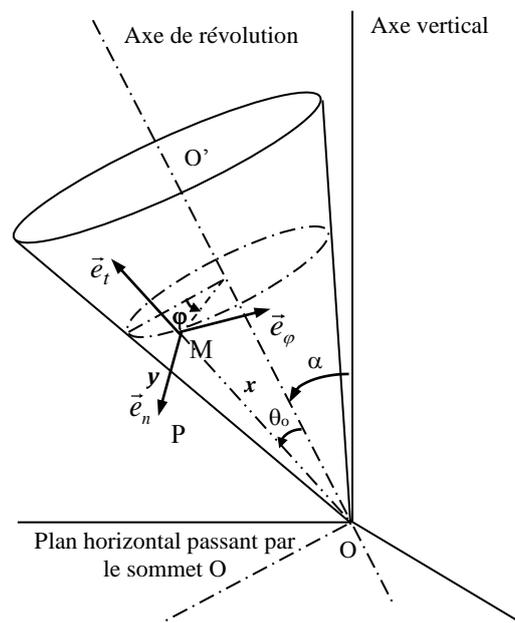


Figure 1 : Schéma du modèle physique

2-1. Hypothèses simplificatrices

Outre les hypothèses classiques de la couche limite et celles de Boussinesq, nous posons les hypothèses suivantes :

- le cône est immobile,
- les transferts sont laminaires et permanents,
- les transferts radiatifs et la dissipation d'énergie visqueuse sont négligeables,
- le fluide est de l'air dont les propriétés physiques sont constantes à l'exception de sa masse volumique dont la variation est à l'origine de la convection naturelle.

2-2. Equations de conservation dans la couche limite

En utilisant les variables adimensionnelles suivantes :

$$x_+ = \frac{x}{L}, y_+ = \frac{y}{L} Gr^{\frac{1}{4}}, \varphi_+ = \varphi, r^+ = \frac{r}{L},$$

$$V_x^+ = \frac{V_x}{\sqrt{Lg\beta\Delta T}}, V_y^+ = \frac{V_y Gr^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{Lg\beta\Delta T}}, V_\varphi^+ = \frac{V_\varphi}{\sqrt{Lg\beta\Delta T}},$$

$$T^+ = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty}$$

avec $Gr = \frac{g\beta(T_p - T_\infty)L^3}{\nu^2}$, le nombre de Grashof et les équations adimensionnelles dans la couche limite s'écrivent :

- **Equation de continuité**

$$\frac{\partial V_x^+}{\partial x_+} + \frac{\partial V_y^+}{\partial y_+} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial V_\varphi^+}{\partial \varphi_+} + \frac{V_x^+}{r^+} \frac{dr^+}{dx_+} = 0 \quad (1)$$

- **Equation de la quantité de mouvement**

$$V_x^+ \frac{\partial V_x^+}{\partial x_+} + V_y^+ \frac{\partial V_x^+}{\partial y_+} + \frac{V_\varphi^+}{r^+} \frac{\partial V_x^+}{\partial \varphi_+} - \frac{V_\varphi^{+2}}{r^+} \frac{dr^+}{dx_+} = S_x T^+ + \frac{\partial^2 V_x^+}{\partial y_+^2} \quad (2)$$

$$V_x^+ \frac{\partial V_\varphi^+}{\partial x_+} + V_y^+ \frac{\partial V_\varphi^+}{\partial y_+} + \frac{V_\varphi^+}{r^+} \frac{\partial V_\varphi^+}{\partial \varphi_+} + \frac{V_x^+ V_\varphi^+}{r^+} \frac{dr^+}{dx_+} = S_\varphi T^+ + \frac{\partial^2 V_\varphi^+}{\partial y_+^2} \quad (3)$$

où les coefficients S_x et S_φ désignent les facteurs de configuration géométrique définis par :

$$S_x = \sin \alpha \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta_0 + \cos \alpha \cdot \cos \theta_0 \quad (4)$$

$$S_\varphi = -\sin \alpha \cdot \sin \varphi \quad (5)$$

- **Equation de la chaleur**

$$V_x^+ \frac{\partial T^+}{\partial x_+} + V_y^+ \frac{\partial T^+}{\partial y_+} + \frac{V_\varphi^+}{r^+} \frac{\partial T^+}{\partial \varphi_+} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T^+}{\partial y_+^2} \quad (6)$$

avec $Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} = \frac{\nu}{a}$, le nombre de Prandtl

A ces équations, nous associons les conditions aux limites adimensionnelles suivantes :

- A la paroi $y^+ = 0$:

$$T^+ = 1, V_x^+ = V_y^+ = V_\phi^+ = 0 \tag{7}$$

- Loin de la paroi $y^+ \rightarrow \infty$:

$$T^+ = 0, V_x^+ = V_y^+ = V_\phi^+ = 0 \tag{8}$$

2-3. Nombre de Nusselt et coefficients de frottement

- Nombre de Nusselt

$$NuGr^{-\frac{1}{4}} = - \left(\frac{\partial T^+}{\partial y_+} \right)_{y_+=0} \tag{9}$$

- Coefficients de frottement à la paroi

$$\frac{1}{2} Cf_u Gr^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{\partial V_x^+}{\partial y_+} \right)_{y_+=0} \tag{10}$$

$$\frac{1}{2} Cf_w Gr^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{\partial V_\phi^+}{\partial y_+} \right)_{y_+=0} \tag{11}$$

3. Modélisation

Le domaine d'étude est décomposé en $N \times M \times L$ parallélépipèdes curvilignes rattachés au corps et définis par les pas adimensionnels $\Delta x_+, \Delta y_+$ et $\Delta \phi_+$, N et L étant les nombres de méridiens et de parallèles. Pour raison de clarté, nous notons respectivement U, V, W et T les composantes méridienne, normale, azimutale et la température adimensionnelles. Les équations de conservation adimensionnelles (1), (2), (3) et (6) sont discrétisées à l'aide d'un schéma implicite aux différences finies. Les calculs sont effectués aux nœuds (i, j, k) avec $1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M$ et $1 \leq k \leq L$. Après arrangement, les équations discrétisées peuvent respectivement se mettre sous la forme suivante :

$$A X_{j+1} + B X_j + C X_{j-1} = D_j, \quad 2 \leq j \leq JMAX - 1 \tag{12}$$

où X représente au choix l'une des grandeurs U, W et T , l'indice $JMAX$ caractérisant l'épaisseur de la couche limite. Les systèmes algébriques (12) associés aux conditions aux limites discrétisés sont résolus par l'algorithme de Thomas. Quant à la composante normale adimensionnelle, elle est calculée à partir de l'équation de continuité :

$$V_{i+1,j}^k = \frac{1}{4} \left[3V_{i+1,j+1}^k + V_{i+1,j-1}^k + 2\Delta y_+ \left(\frac{U_{i+1,j}^k - U_{i,j}^k}{\Delta x_+} + \frac{3W_{i+1,j}^{k+1} - 4W_{i+1,j}^k + W_{i+1,j}^{k-1}}{2\Delta\phi_+ r_{i+1}^+} + \frac{U_{i+1,j}^k}{\Delta x_+} \left(1 - \frac{r_i^+}{r_{i+1}^+} \right) \right) \right] \quad (13)$$

$$1 \leq i \leq N - 1, 1 \leq k \leq L - 1 \text{ et } 2 \leq j \leq \text{JMAX} - 1$$

La convergence au sein de la couche limite est assurée lorsque le critère suivant :

$$\left| \frac{|\mathbf{X}^{(p+1)}| - |\mathbf{X}^{(p)}|}{\text{Sup}(|\mathbf{X}^{(p+1)}|, |\mathbf{X}^{(p)}|)} \right| \leq \varepsilon \quad (14)$$

est simultanément vérifié pour T, U et W.

$\mathbf{X}^{(p)}$ et $\mathbf{X}^{(p+1)}$ sont respectivement les valeurs de la grandeur X aux itérations p et p+1.

4. Résultats et discussion

Dans nos résultats, nous fixons $Pr=0,72$, $T_p = 373K$ et $T_\infty = 298K$. Nous avons validé le code numérique en comparant les résultats issus de nos calculs avec ceux déduits de la littérature [7]. La **Figure 2**, illustrant l'évolution de la température à l'état stable en fonction de la coordonnée normale y_+ pour $x_+ = 1,0$, montre que nos résultats sont en bon accord avec ceux de la littérature, l'écart relatif ne dépassant pas 5%. Les courbes de la **Figure 3a** représentent l'évolution de la composante méridienne adimensionnelle de la vitesse en fonction de la coordonnée normale adimensionnelle y_+ sur le méridien supérieur $\phi = 180^\circ$, pour $\theta_0 = 20^\circ$ et pour plusieurs valeurs de α .

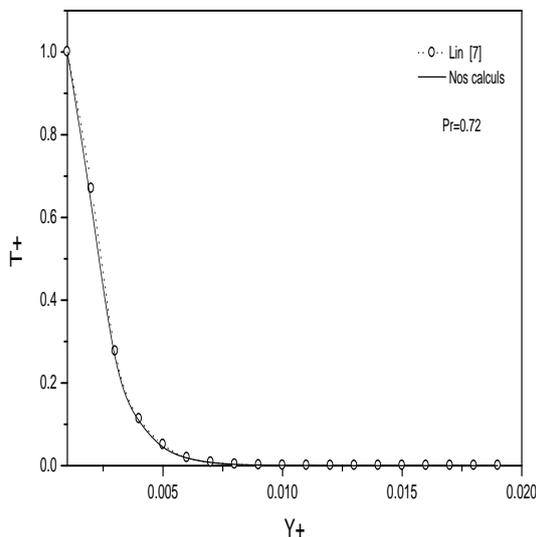


Figure 2 : Comparaison de la température à l'état stable en fonction de y_+ , $x_+=1.0$ et $\alpha=0^\circ$

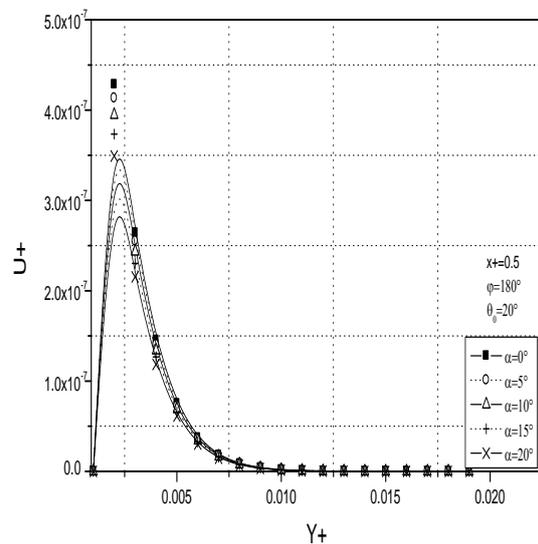


Figure 3a : Composante méridienne en fonction de y_+ , pour plusieurs valeurs de α , $\theta_0=20^\circ$ et $\phi = 180^\circ$

Ces courbes montrent que sa valeur, représentée par un pic, est maximale au voisinage du sommet du cône et que son amplitude diminue au fur et à mesure que l'angle d'inclinaison augmente. Cette amplitude décroît également avec l'augmentation de l'angle d'ouverture (**Figure 3.b**).

Toutefois, les variations de l'angle d'inclinaison et de l'angle d'ouverture du cône affectent très peu l'épaisseur de la couche limite. Ces résultats sont corroborés par l'évolution de la température adimensionnelle en fonction de la coordonnée normale adimensionnelle représentée par les courbes de la **Figure 8**.

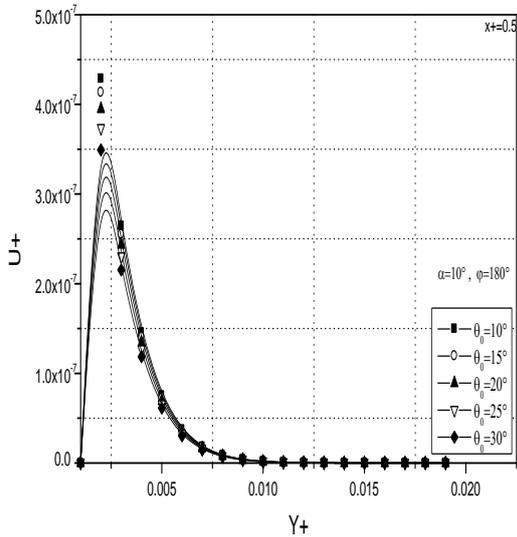


Figure 3b : Composante méridienne en fonction de γ_+ , pour plusieurs valeurs de θ_0 , $\alpha=10^\circ$ et $\varphi=180^\circ$,

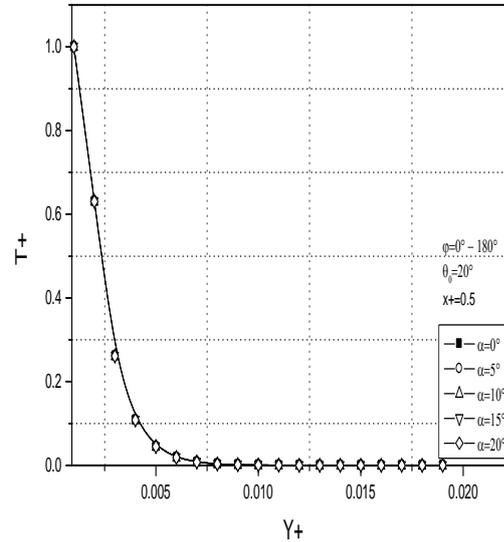


Figure 8 : Profil de température en fonction de γ_+ , pour plusieurs valeurs de α , $\varphi=0^\circ$ et $\varphi=180^\circ$, $\theta_0=20^\circ$, $x_+=0,5$

La **Figure 4a** illustre l'évolution de la composante normale adimensionnelle en fonction de l'abscisse curviligne adimensionnelle x_+ pour $\varphi = 0^\circ$, $\theta_0 = 20^\circ$ et pour quelques valeurs de α . Les courbes montrent qu'elle est positive pour les faibles valeurs de l'inclinaison ($\alpha < 20^\circ$) et décroît asymptotiquement vers une valeur nulle le long de la paroi du cône. Et, de plus, lorsqu'on augmente l'angle d'inclinaison, la composante normale devient négative et sa magnitude diminue. On constate que cette composante est nulle le long du méridien inférieur pour des valeurs égales du demi-angle d'ouverture et de l'angle d'inclinaison du cône. Par ailleurs, les courbes de la **Figure 4b** montrent que les valeurs de la composante normale demeurent positives sur le méridien supérieur défini par $\varphi = 180^\circ$, quelle que soit l'inclinaison et l'ouverture du cône.

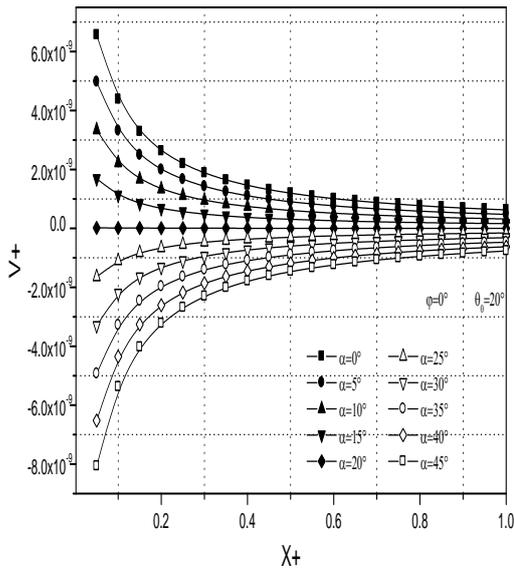


Figure 4a : Composante normale en fonction de x_+ , pour plusieurs valeurs de α , $\theta_0 = 20^\circ$ et $\varphi = 0^\circ$

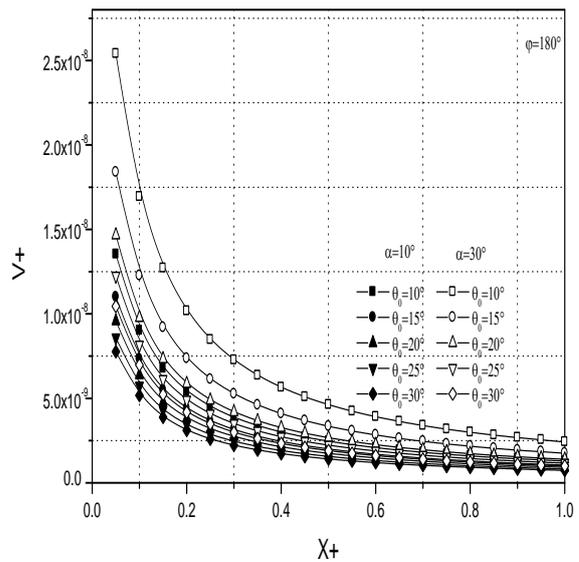


Figure 4b : Composante normale en fonction de x_+ , pour plusieurs valeurs de θ_0 , $\alpha = 10^\circ$ et $\alpha = 30^\circ$, $\varphi = 180^\circ$

Cependant, on retrouve le résultat ci-dessus dans la mesure où l'augmentation de l'angle d'inclinaison fait croître son module sur ce méridien et, par contre, celui-ci diminue lorsqu'on augmente l'angle d'ouverture. Les courbes de la **Figure 5a** et de la **Figure 5b** corroborent ces résultats.

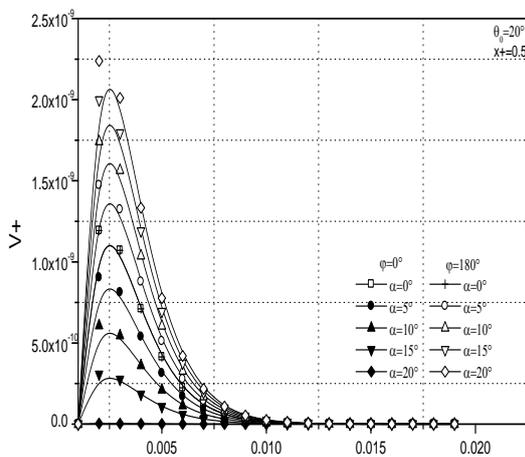


Figure 5a : Composante normale en fonction de y_+ , pour plusieurs valeurs de α , $\theta_0 = 20^\circ$ et $x_+ = 0.5$

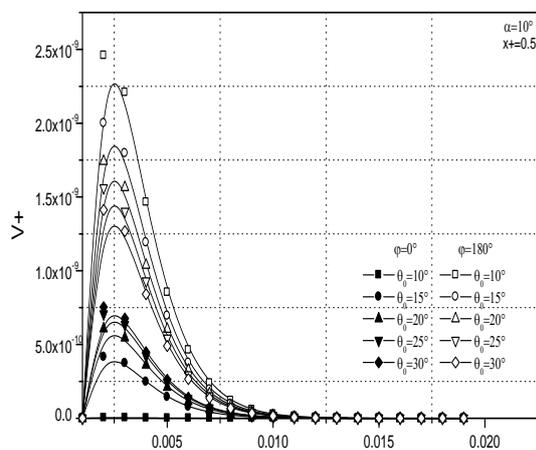


Figure 5b : Composante normale en fonction de y_+ , pour plusieurs valeurs de θ_0 , $\alpha = 10^\circ$, $\varphi = 0^\circ$ et $\varphi = 180^\circ$, $x_+ = 0.5$

Les valeurs négatives de la composante normale de la vitesse caractérisent un mouvement du fluide vers la paroi sur le méridien inférieur lorsque le cône est fortement incliné (**Figure 6a**). Ces résultats sont confirmés par l'évolution de cette composante en fonction de y_+ pour $\alpha = 45^\circ$ et $\varphi = 0^\circ$, le fluide adhère mieux sur le méridien inférieur.

Par contre, cette adhérence tend à disparaître plus on augmente l'angle d'ouverture. Alors, le fluide est refoulé par la paroi aussi bien sur méridien moyen que sur le méridien supérieur, comme le montre les courbes de la **Figure 6b**.

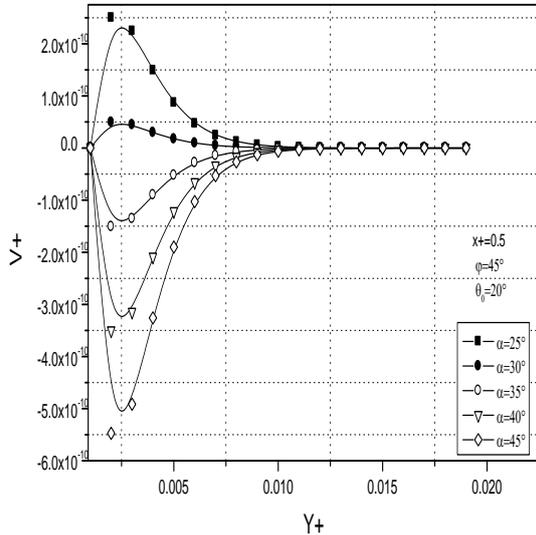


Figure 6a : Composante normale en fonction de y_+ , pour plusieurs valeurs de α , $\varphi = 45^\circ$ et $\theta_0 = 20^\circ$, $x_+ = 0,5$

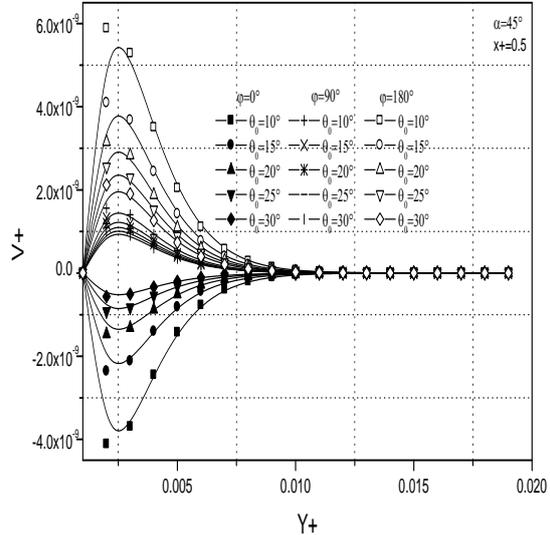


Figure 6b : Composante normale en fonction de y_+ , pour plusieurs valeurs de θ_0 et de φ , $\alpha = 45^\circ$, $x_+ = 0,5$

La **Figure 7** présente l'évolution de la composante normale de la vitesse en fonction de la coordonnée azimutale φ pour quelques valeurs de θ_0 et de l'angle d'inclinaison. Globalement, elle varie suivant un profil sinusoïdal et croît du méridien inférieur au méridien supérieur. Son amplitude augmente avec l'angle d'inclinaison et diminue avec l'augmentation de l'angle d'ouverture θ_0 . Les courbes montrent qu'il existe un point privilégié situé au voisinage du méridien d'équation $\varphi = 90^\circ$ et dont la position dépend de l'abscisse curviligne x_+ , auquel la composante normale ne dépend ni de l'angle d'inclinaison ni de l'angle d'ouverture. Les courbes de la **Figure 9** montrent que le coefficient de frottement pariétal suivant x_+ évolue de manière sinusoïdale avec φ . Son amplitude croît lorsque l'angle d'inclinaison augmente et diminue avec l'augmentation de l'angle d'ouverture. Il paraît normal que pour de faibles ouverture et inclinaison du cône, le coefficient de frottement tangentiel Cf_v varie très faiblement suivant φ .

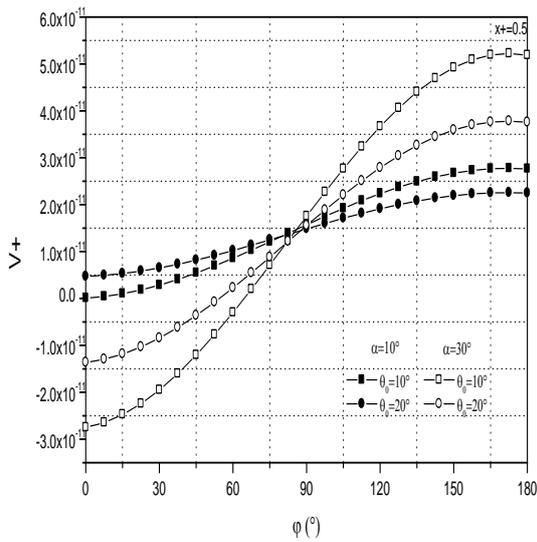


Figure 7 : Composante normale en fonction de φ , pour plusieurs valeurs de θ_0 et α , $x_+ = 0,5$

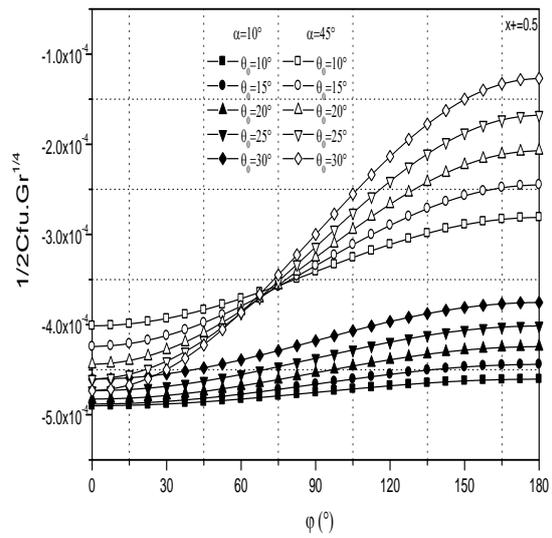


Figure 9 : Coefficient de frottement tangential en fonction de φ , pour plusieurs valeurs de θ_0 et de α , $x_+ = 0,5$

D'autre part, le coefficient de frottement azimutal Cf_w évolue également suivant un profil sinusoïdal avec la coordonnée azimutale φ , comme l'indique la **Figure 10**. Ces courbes montrent que son amplitude augmente avec l'augmentation de l'angle d'inclinaison α , tandis que l'influence de l'angle d'ouverture est quasiment très faible, en raison de la symétrie de révolution du corps.

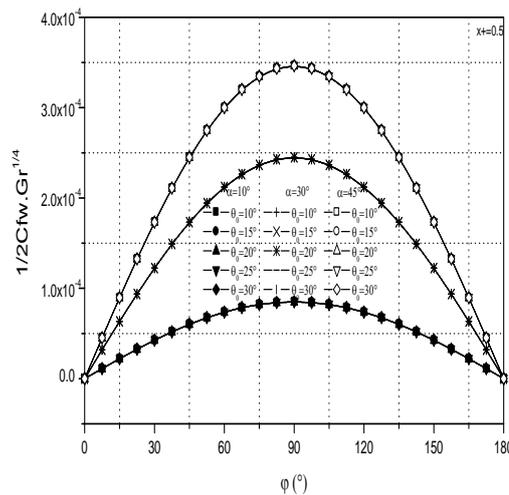


Figure 10 : Coefficient de frottement azimutal en fonction de φ , pour plusieurs valeurs de θ_0 et de α , $x_+ = 0,5$

5. Conclusion

Nous avons procédé une étude numérique de l'écoulement et des transferts thermiques en convection naturelle autour d'un cône de révolution dont l'axe est incliné par rapport à la direction verticale et la paroi est maintenue à une température constante. Nous avons rapporté plus particulièrement dans cet article l'étude de l'influence des angles d'ouverture et de l'inclinaison du cône sur la composante normale de la vitesse. Par ailleurs, nos résultats ont montré qu'il existe un point privilégié situé au voisinage du méridien $\varphi = 90^\circ$ auquel la composante normale est à la fois indépendante de l'angle d'inclinaison et de l'angle d'ouverture du cône. Toutefois, nous avons remarqué que la variation de l'angle d'ouverture du cône n'affecte pas beaucoup le coefficient de frottement azimuthal, tandis que l'accroissement de l'angle d'inclinaison fait augmenter seulement son module. De plus, les effets de l'angle d'inclinaison et de l'angle d'ouverture du cône sont relativement très faibles aussi bien sur l'épaisseur de la couche limite que sur l'échange thermique au sein de celle-ci.

Références

- [1] - H.J. MERK, and J. A. PRINS, " *Thermal convection in laminar boundary layer*", Int. Appl. Sci. Res, 4 (1953) 11-24.
- [2] - BAPUJI PULLEPU, K. EKAMBAVANAN, ALI. J. CHAMKHA, " *Unsteady laminar natural convection flow past an isothermal vertical cone*", Int. J. Heat and Technology, 25(2) (2007) 17-28.
- [3] - POP, TSUNG YEN, " *Natural convection over a vertical wavy frustum of a cone*", Int. J. Non-linear Mechanics, 34 (1999) 925-934.
- [4] - M. SIABDALLAH, B. ZEGHMATI, M. DAGUENET, " *Etude de la convection naturelle thermique et massique dans la couche limite autour d'un tronc de cône à paroi sinusoïdale*", 12^e Journée Internationale de Thermique, Maroc (2005).
- [5] - S. ROY, " *Free convection from a vertical cone at high Prandtl numbers*", Trans. ASME Journal of Heat Transfer, 96 (1974) 115-117.
- [6] - F. A. RAKOTOMANGA, E. ALIDINA, " *Transferts thermiques convectifs tridimensionnels autour d'un cône de révolution*", congrès SFT, réf 6212, Gerardmer, France (2013).
- [7] - F. N. LIN, " *Laminar convection from a vertical cone with uniform surface heat flux*", Letters in Heat and Mass Transfer, 3 (1976) 49-58.
- [8] - POP, I., TAKHAR, H. S., " *Compressibility effects in laminar free convection from a vertical cone*", Appl. Sci. Res., 48 (1991) 71-78.
- [9] - M. A. ALIM, M. ALAM, M. K. CHOWDHURY, " *Pressure work effect on natural convection flow from a vertical circular cone with suction and non-uniform surface temperature*", Journal of Mechanical Engineering, 36 (2006) 6-11.