Journal Afrika Statistika

ISSN 0852-0305

Journal Afrika Statistika
Vol. 5, N°13, 2010, page 297–305.

Sur les estimateurs du maximum de vraisemblance dans les modèles multiplicatifs de Poisson et binomiale négative

Lucien Diégane Gning[†] **et Daniel Pierre-Loti-Viaud**[‡]

[†]Laboratoire d'Etudes et de Recherches en Statistiques et Développement (LERSTAD), UFR de Sciences Appliquées et de Technologies, B.P 234, Université Gaston Berger, Saint-Louis, Sénégal
[‡]LSTA, Université Pierre et Marie Curie, Boite 158, 4 place Jussieu, F-75252, Paris Cedex 05

Received 26 January 2010; Accepted 6 August 2010

Abstract. We are interested in the existence and uniqueness of maximum likelihood estimators of parameters in the two multiplicative regression models, with Poisson or negative binomial probability distributions. Following its work on the multiplicative Poisson model with two factors without repeated measures, Haberman gave a necessary and sufficient condition for existence and uniqueness of the maximum likelihood estimator of this model, furthermore, he provided an explicit expression of this estimator. In this paper, we propose a generalization of these results to a multiplicative Poisson model with repeated measures and more than two factors. We also show that the condition obtained is also a necessary and sufficient condition for the existence and uniqueness of the maximum likelihood estimator in the multiplicative negative binomial model with several factors, with or without repeated measures.

Résumé. Nous nous intéressons à l'existence et à l'unicité des estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres dans les modèles de Poisson multiplicatif et binomial négatif multiplicatif. Suite à ses travaux sur le modèle de Poisson multiplicatif sans répétition à deux facteurs, Haberman [8] a donné une condition nécessaire et suffisante pour l'existence et l'unicité de l'estimateur du maximum de vraisemblance de ce modèle, il a fourni en plus une expression explicite de cet estimateur. Dans cet article, nous proposons une généralisation de ces deux résultats à un modèle de Poisson multiplicatif avec répétitions à plus de deux facteurs. Nous montrons également que la condition obtenue est aussi une condition nécessaire et suffisante d'existence et d'unicité de l'estimateur du maximum de vraisemblance dans le modèle binomial négatif multiplicatif à plusieurs facteurs avec ou sans répétitions.

Key words: Modèles de risque; Probabilités de ruine; Systèmes de files d'attente; Interaction théorie de risque et files d'attente; Stabilité forte; inégalités de stabilité.
AMS 2000 Mathematics Subject Classification : 34K20, 60K35, 91B30.

1. Introduction

Les modèles de régression de Poisson et binomial négatif occupent une part de plus en plus importante dans la modélisation des données de comptage, voir par exemple Cameron and Trivedi [4], Christensen [6], Hilbe [10], et les références qui y figurent. On peut aussi mentionner qu'ils sont très utilisés dans la modélisation des nombres de sinistres en assurance non vie, et pour un exposé général dans ce contexte on pourra consulter Charpentier and Denuit [5], Partrat and Besson [12]. Rappelons aussi que par rapport au modèle de Poisson, le modèle binomial négatif permet de prendre en compte une surdipersion (variance supérieure à la moyenne) qui serait observée sur les données. Nous nous intéressons ici aux conditions d'existence et d'unicité des estimateurs du maximum de vraisemblance (EMV) des paramètres de ces modèles. Plusieurs travaux avec différentes approches ont été effectués sur ce thème, à la base, toujours dans le cadre des modèles statistiques exponentiels. On peut citer parmi les plus importants Barndorff-Nielsen

Lucien Diégane Gning: luciengning@gmail.com; luciendesgning@yahoo.fr
Daniel Pierre-Loti-Viaud: email daniel.pierre-loti-viaud@upmc.fr

[1], Berk [2], Bickel et Doksum [3], Christensen [6], Haberman [8, 9], Santner et Duffy [13] et Wedderburn [14]. Nous partirons ici de l'approche utilisée par Berk [2], Christensen [6], Haberman [8, 9] et Santner et Duffy [13].

Dans la section 2, nous présentons les différents modèles étudiés et nous définissons quelques notations qui nous seront utiles par la suite. Dans la section 3, nous énonçons les différents résultats obtenus, et nous détaillons leurs preuves dans la section 4.

2. Présentation des modèles et notations

Nous considérons une variable aléatoire de comptage Y à expliquer par J variables explicatives déterministes $X_1, \ldots, X_J$, qui peuvent être quantitatives ou qualitatives et qui interviennent sous forme de facteurs. Ces facteurs sont respectivement à $I_1, \ldots, I_J$ modalités, avec $I_1, \ldots, I_J \in \{2, 3, \ldots\}$. Nous mesurons toutes ces variables sur une population de n individus, que nous partageons en groupes selon les mesures obtenues pour les variables explicatives. En effet, l'ensemble des individus qui pour tous les facteurs ont les mêmes modalités, correspond à un groupe, et on désigne par $K_{i_1 \ldots i_J}$ l'effectif du groupe prenant les modalités i_j pour $j \in \{1, \ldots, J\}$. Dans cet article, nous supposons que les effectifs des groupes des modèles peuvent vérifier les propriétés suivantes :

$$K_{i_1 \ldots i_J} \geq 1, \;\; i_j \in \{1, \ldots, I_j\}, j \in \{1, \ldots, J\}, \tag{1}$$

$$K_{i_1 \ldots i_J} = \kappa_{i_1}^{(1)} \times \cdots \times \kappa_{i_J}^{(J)}, \;\; i_j \in \{1, \ldots, I_j\}, j \in \{1, \ldots, J\}, \tag{2}$$

avec $\kappa_{i_j}^{(j)} \geq 1$, pour tout $i_j \in \{1, \ldots, I_j\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, J\}$.

Comme dans le cas du modèle factoriel gaussien, nous verrons que la propriété (2), qui généralise la notion de plan équilibré, nous permet d'obtenir des solutions explicites des EMV dans le modèle de Poisson. Nous notons aussi $Y_{i_1 \ldots i_J, k}$, $k \in \{1, \ldots, K_{i_1 \ldots i_J}\}$, $i_j \in \{1, \ldots, I_j\}$, $j \in \{1, \ldots, J\}$, la variable aléatoire de comptage correspondant à l'individu k du groupe des modalités $i_1, \ldots, i_J$, et, $\mu_{i_1 \ldots i_J} = \mathbb{E}(Y_{i_1 \ldots i_J, k})$ son espérance. Les variables $Y_{i_1 \ldots i_J, k}$ sont supposées indépendantes. Dans la suite de ce travail, pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$ de $R^{I_1 \times \cdots \times I_J}$ de composantes $u_{i_1 \ldots i_J}$, $i_j \in \{1, \ldots, I_j\}$, $j \in \{1, \ldots, J\}$, et pour toute fonction réelle f, nous notons $f(\boldsymbol{u})$ comme le vecteur de coordonnées $f(u_{i_1 \ldots i_J})$, $i_j \in \{1, \ldots, I_j\}$, $j \in \{1, \ldots, J\}$.

Considérons maintenant les modèles suivants.

2.1. *Le modèle de Poisson multiplicatif (PM)*

Dans ce modèle nous supposons que les données suivent des lois de Poisson, c'est-à-dire :

$$Y_{i_1 \ldots i_J, k} \sim \mathcal{P}(\mu_{i_1 \ldots i_J}), \;\; k \in \{1, \ldots, K_{i_1 \ldots i_J}\}, i_j \in \{1, \ldots, I_j\}, j \in \{1, \ldots, J\},$$

avec :

$$\log(\mu_{i_1 \ldots i_J}) = m + \alpha_{i_1}^{(1)} + \ldots + \alpha_{i_J}^{(J)}, \tag{3}$$

où $m, \alpha_{i_1}^{(1)}, \ldots, \alpha_{i_J}^{(J)} \in \mathbb{R}$.

2.2. *Le modèle binomial négatif multiplicatif (BNM)*

Indiquons que nous utilisons le paramétrage suivant pour la loi binomiale négative $\mathcal{NB}(r, p)$, $r \in]0, \infty[$, $p \in]0, 1[$, cette loi est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{NB}(r, p)(l) = \frac{\Gamma(r + l)}{\Gamma(r) l!} p^l (1 - p)^r, \;\; l \in \mathbb{N}.$$

Nous supposons dans le modèle BNM que :

$$Y_{i_1 \ldots i_J, k} \sim \mathcal{NB}(r, p_{i_1 \ldots i_J}), \;\; k \in \{1, \ldots, K_{i_1 \ldots i_J}\}, i_j \in \{1, \ldots I_j\}, j \in \{1, \ldots J\},$$

où r est connu, $p_{i_1 \ldots i_J} \in]0, 1[$ vérifie :

$$\log(\mu_{i_1 \ldots i_J}) = \log\left(\frac{r p_{i_1 \ldots i_J}}{1 - p_{i_1 \ldots i_J}}\right) = m + \alpha_{i_1}^{(1)} + \ldots + \alpha_{i_J}^{(J)}, \tag{4}$$

où $m, \alpha_{i_1}^{(1)}, \ldots, \alpha_{i_J}^{(J)} \in \mathbb{R}$.

Remarquons que les modèles PM et BNM définis respectivement par (3) et (4) ne sont pas identifiables. Nous introduisons alors les contraintes d'identifia-bilité classiques suivantes :

$$\sum_{i_j=1}^{I_J} \alpha_{i_j}^{(j)} = 0, \;\; j \in \{1, \ldots, J\}. \tag{5}$$

Considérons alors :

$$\mathcal{B} = \{\mathbb{1}_{i_1 \ldots i_J}, \;\; i_j \in \{1, \ldots, I_j\}, j \in \{1, \ldots, J\}\},$$

la base canonique de $\mathbb{R}^{I_1 \cdots I_J}$ et :

$$\mathcal{M}^J = \prod_{j=1}^{J} \{1, \ldots, I_j\},$$

l'ensemble des modalités de tous les facteurs. Ensuite, posons pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$ et pour tout $i_j^* \in \{1, \ldots, I_j\}$:

$$\mathbb{1}_j(i_j^*) = \sum_{\substack{(i_1 \ldots i_J)' \in \mathcal{M}^J \\ i_j = i_j^*}} \mathbb{1}_{i_1 \ldots i_J},$$

et, pour tout vecteur $\boldsymbol{Z} = (Z_{i_1 \ldots i_J})_{i_j \in \{1, \ldots I_j\}, \; j \in \{1, \ldots, J\}}$ de $\mathbb{R}^{I_1 \cdots I_J}$, définissons sa marge (j, i_j^*), notée $Z_j(i_j^*)$, comme :

$$Z_j(i_j^*) = \boldsymbol{Z}' \mathbb{1}_j(i_j^*) = \sum_{\substack{(i_1 \ldots i_J)' \in \mathcal{M}^J \\ i_j = i_j^*}} Z_{i_1 \ldots i_J},$$

où nous avons noté pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$ de $\mathbb{R}^{I_1 \times \ldots \times I_J}$, $\boldsymbol{u}'$ son vecteur transposé. Enfin posons :

$$d = I_1 \times \ldots \times I_J.$$

Remarquons maintenant que pour les modèles PM et BNM les équations (3) et (4) se réécrivent sous la forme matricielle:

$$log(\boldsymbol{\mu}) = X\boldsymbol{\beta}, \tag{6}$$

où $\boldsymbol{\mu} = (\mu_{i_1 \ldots i_J})_{i_j \in \{1, \ldots I_j\}, \; j \in \{1, \ldots, J\}} \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{\beta} = (\mu \;\; \alpha_1^{(1)} \ldots \alpha_{I_1}^{(1)} \ldots \alpha_1^{(J)} \ldots \alpha_{I_J}^{(J)})' \in \mathbb{R}^{1+I_1+\ldots+I_J}$, et X est la matrice $d \times (1 + I_1 + \ldots + I_J)$ donnée par :

$$X = [\mathbb{1} \;\; \mathbb{1}_1(1) \ldots \mathbb{1}_1(I_1) \;\; \mathbb{1}_2(1) \ldots \mathbb{1}_2(I_2) \ldots \mathbb{1}_J(1) \ldots \mathbb{1}_J(I_J)], \tag{7}$$

avec :

$$\mathbb{1} = \sum_{(i_1 \ldots i_J)' \in \mathcal{M}^J} \mathbb{1}_{i_1 \ldots i_J} = (1, \ldots, 1)' \in \mathbb{R}^d.$$

Ainsi, il résulte de (6) que le paramètre $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$ dans les modèles PM et BNM satisfait à la contrainte :

$$\log(\boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{F} = Im(X) \subset \mathbb{R}^d. \tag{8}$$

Nous ferons donc l'étude des conditions d'existence et d'unicité de l' EMV du paramètre $\boldsymbol{\mu}$ dans les modèles PM et BNM sous cette contrainte, les résultats se transposant sur le paramètre $\boldsymbol{\beta}$ par changement bijectif de paramètres, lorsque les contraintes (5) sont vérifiées.

3. Résultats d'existence et d'unicité des EMV

Pour une série d'observations $y_{i_1 \dots i_J,k}$, $k \in \{1, \dots, K_{i_1 \dots i_J}\}$, $i_j \in \{1, \dots, I_j\}$, $j \in \{1, \dots, J\}$ donnée, les fonctions log-vraisemblances respectives des modèles PM et BNM s'écrivent à des constantes près, comme :

$$\ell_y(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{j=1}^{J} \sum_{i_j}^{I_j} \left(s_{i_1 \dots i_J} \log \mu_{i_1 \dots i_J} - K_{i_1 \dots i_J} \mu_{i_1 \dots i_J} \right), \tag{9}$$

et

$$\tilde{\ell}_y(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{j=1}^{J} \sum_{i_j}^{I_j} \left(s_{i_1 \dots i_J} \log \mu_{i_1 \dots i_J} - (rK_{i_1 \dots i_J} + s_{i_1 \dots i_J}) \log(r + \mu_{i_1 \dots i_J}) \right), \tag{10}$$

où l'on a posé :

$$s_{i_1 \dots i_J} = \sum_{k=1}^{K_{i_1 \dots i_J}} y_{i_1 \dots i_J,k}, \;\; i_j \in \{1, \dots I_j\}, \;\; j \in \{1, \dots, J\}.$$

Dans la suite nous considérons $S_{i_1 \dots i_J} = \sum_{k=1}^{K_{i_1 \dots i_J}} Y_{i_1 \dots i_J,k}$ et nous posons :

$$\boldsymbol{S} = \left(S_{i_1 \dots i_J} \right)'_{(i_j \dots i_J)' \in \mathcal{M}^J} \in \mathbb{R}^d.$$

Rappelons que lorsque $K_{i_1 \dots i_J} = 1$, $\forall (i_1 \dots i_J)' \in \mathcal{M}^J$ (c.-à-d. lorsque le modèle est sans répétition), nous pouvons appliquer au modèle PM le résultat d'existence et d'unicité de l'EMV donné dans Christensen [6], Haberman [8] et Santner et Duffy [13] dans le cadre de leurs travaux sur les modèles log-linéaires à lois de Poisson. Ce résultat est aussi un résultat d'existence et d'unicité de l'EMV d'un modèle BNM avec ou sans répétition (voir Gning [7]). Commençons par généraliser dans le théorème suivant ce résultat aux modèles PM et BNM avec répétitions, c'est-à-dire vérifiant la propriété (1) avec au moins une des inégalités qui est stricte.

Théorème 1. *Pour les modèles PM et BNM vérifiant la propriété (1), la condition (11) suivante est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence et l'unicité de l'EMV du paramètre* $\boldsymbol{\mu}$ *sous la contrainte (8) :*

$$\exists \delta \in \mathcal{F}^{\perp} / \; \forall (i_1 \dots i_J)' \in \mathcal{M}^J, \;\; S_{i_1 \dots i_J} + \delta_{i_1 \dots i_J} > 0. \tag{11}$$

Proof. La preuve est une simple extension des résultats antérieurs, voir Gning [7].

Nous pouvons énoncer maintenant les résultats principaux que nous avons obtenus. Dans le théorème 2, nous généralisons à un modèle PM sans répétition et à plus de deux facteurs les résultats d'existence, d'unicité et la solution explicite de l'EMV du paramètre $\boldsymbol{\mu}$ donnés par Haberman [8] dans le cadre du modèle PM sans répétition à deux facteurs. Nous effectuons le même travail dans le théorème 3 pour un modèle PM avec répétitions et à plus de deux facteurs sous la condition (2), et nous montrons dans le théorème 4 que la condition d'Haberman est encore une condition nécessaire et suffisante d'existence et d'unicité de l'EMV dans le modèle PM avec répétitions général. Enfin, nous montrons dans le théorème 5 que cette condition d'Haberman est aussi une condition nécessaire et suffisante d'existence et d'unicité de l'EMV dans le modèle BNM. Remarquons que la condition d'Haberman prend une expression parti-culièrement simple à vérifier sur les observations : toutes les marges doivent être strictement positives.

Théorème 2. *Pour le modèle de Poisson multiplicatif complet sans répétition défini par (3), les conditions (A1), (A2) et (A3) suivantes sont équivalentes.*

(A1) Pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$, *et tout* $i_j^* \in \{1, \dots, I_j\}$, *la marge* $Y_j(i_j^*)$ *des observations est strictement positive.*

(A2) L'EMV $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ *du paramètre* $\boldsymbol{\mu}$ *existe et ses composantes sont données par :*

$$\hat{\mu}_{i_1 \dots i_J} = \frac{Y_1(i_1) \times \dots \times Y_J(i_J)}{(\mathbb{1}'\boldsymbol{Y})^{J-1}}, \quad i_j \in \{1, \dots, I_j\}, \;\; j \in \{1, \dots, J\}.$$

$(A3)$ – *Les EMV* $\hat{m}$ *et* $\hat{\alpha}^{(j)}_{i_j}$ *des paramètres* m *et* $\alpha^{(j)}_{i_j}$ *du modèle défini sous les contraintes d'identifiabilité (5) existent et sont donnés par:*

$$\hat{m} = \frac{1}{I_1}\sum_{i_1=1}^{I_1}\log Y_1(i_1) + \cdots + \frac{1}{I_J}\sum_{i_J=1}^{I_J}\log Y_J(i_J) - (J-1)\log(\mathbb{1}'\boldsymbol{Y}),$$

et:

$$\hat{\alpha}^{(j)}_{i_j} = \log Y_j(i_j) - \frac{1}{I_j}\sum_{i_j^*=1}^{I_j}\log Y_j(i_j^*),\ \ i_j \in \{1,\ldots,I_j\},\ \ j \in \{1,\ldots,J\}.$$

Théorème 3. *Pour le modèle PM vérifiant les propriétés (1), (2), les propositions (B1), (B2) et (B3) suivantes sont équivalentes :*

$(B1)$ *pour tout* $j \in \{1,\ldots,J\}$, *et tout* $i_j^* \in \{1,\ldots,I_j\}$, *la marge* $S_j(i_j^*)$ *des sommes des observations par groupe est strictement positive;*

$(B2)$ *l'EMV* $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ *du paramètre* $\boldsymbol{\mu}$ *du modèle sous la contrainte (8) existe et ses composantes sont données par :*

$$\hat{\mu}_{i_1\ldots i_J} = \frac{S_1(i_1)\times\cdots\times S_J(i_J)}{K_{i_1\ldots i_J}(\mathbb{1}'\boldsymbol{S})^{J-1}},\quad i_j \in \{1,\ldots,I_j\},\ \ j \in \{1,...,J\}; \tag{12}$$

$(B3)$ *les EMV* $\hat{m}$ *et* $\hat{\alpha}^{(j)}_{i_j}$ *des paramètres* m *et* $\alpha^{(j)}_{i_j}$ *du modèle défini sous les contraintes d'identifiabilité (5) existent et sont donnés par :*

$$\hat{m} = \frac{1}{I_1}\sum_{i_1=1}^{I_1}\log\frac{S_1(i_1)}{\kappa^{(1)}_{i_1}} + \ldots + \frac{1}{I_J}\sum_{i_J=1}^{I_J}\log\frac{S_J(i_J)}{\kappa^{(J)}_{i_J}} - (J-1)\log(\mathbb{1}'\boldsymbol{S}),$$

et :

$$\hat{\alpha}^{(j)}_{i_j} = \log\frac{S_j(i_j)}{\kappa^{(j)}_{i_j}} - \frac{1}{I_j}\sum_{i_j^*=1}^{I_j}\log\frac{S_j(i_j^*)}{\kappa^{(j)}_{i_j^*}},\ \ i_j \in \{1,\ldots,I_j\},\ \ j \in \{1,\ldots,J\}.$$

Théorème 4. *Pour le modèle PM vérifiant la propriété* (1) *la condition* $(B1)$ *est une condition nécessaire et suffisante d'existence et d'unicité de l'EMV* $\boldsymbol{\mu}$ *du modèle sous la contrainte (8).*

Corollaire 1. *Nous déduisons des théorèmes* 1 *et* 4 *l'équivalence des conditions* (*11*) *et* $(B1)$.

Théorème 5. *Pour le modèle BNM vérifiant la propriété* (1) *la condition* $(B1)$ *est une condition nécessaire et suffisante d'existence et d'unicité de l'EMV* $\boldsymbol{\mu}$ *du modèle sous la contrainte (8).*

Remarque 1. Dans le modèle BNM, nous ne savons pas obtenir une formule similaire à (12), qui est une représentation explicite de $\hat{\boldsymbol{\mu}}$. La preuve du théorème 5 est par contre immédiate à partir des résultats du théorème 1 et du corollaire 1.

Avant de démontrer ces résultats, rappelons dans le lemme suivant une application de la caractérisation de L'EMV $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ donnée par Berk [2] dans le cas du modèle PM. On y utilisera la notation :

$$D_{\boldsymbol{K}} = \mathrm{diag}\Big(K_{i_1\ldots i_J},\quad (i_j\ldots i_J)' \in \mathcal{M}^J\Big),$$

où diag($\boldsymbol{u}$) désigne la matrice diagonale qui a comme coefficients diagonaux les composantes du vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{I_1\times\ldots\times I_J}$.

Lemme 1. *Si* $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ *vérifiant* $\log(\hat{\boldsymbol{\mu}}) \in \mathcal{F}$ *est solution de l'équation :*

$$X'\boldsymbol{S} = X'D_{\boldsymbol{K}}\hat{\boldsymbol{\mu}}, \tag{13}$$

alors $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ *est l'unique EMV du modèle PM défini sous la contrainte (8).*

Respectivement si (13) n'a pas de solution, alors L'EMV de $\boldsymbol{\mu}$, sous la contrainte (8), n'existe pas dans le modèle PM.

Proof. Voir Berk [2].

4. Preuves

Dans cette section, nous démontrons les théorèmes 2, 3 et 4 énoncés dans la section précédente.

Preuve du Théorème 2

Montrons pour commencer l'implication $(A1) \Rightarrow (A2)$. Supposons que pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$ et tout $i_j^* \in \{1, \ldots, I_j\}$, $Y_j(i_j^*) > 0$. On pose $\hat{\boldsymbol{\mu}}$, le vecteur de coordonnées $\hat{\mu}_{i_1 \ldots i_J}$, $i_j \in \{1, \ldots, I_j\}$, $j \in \{1, \ldots, J\}$ avec :

$$\hat{\mu}_{i_1 \ldots i_J} = \frac{Y_1(i_1) \times \cdots \times Y_J(i_J)}{(\mathbb{1}' \boldsymbol{Y})^{J-1}} > 0.$$

Le vecteur $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ est solution de l'équation (13), c'est-à-dire $X' \boldsymbol{Y} = X' \hat{\boldsymbol{\mu}}$. En effet comme pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$, $\sum_{i_j=1}^{I_j} Y_j(i_j) = \mathbb{1}' \boldsymbol{Y}$, nous avons, pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$, et pour tout $i_j^* \in \{1, \ldots, I_j\}$:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_j(i_j^*) &= \sum_{\substack{(i_1 \ldots i_J) \in \mathcal{M}^J \\ i_j = i_j^*}} \hat{\mu}_{i_1 \ldots i_J} = \sum_{\substack{(i_1 \ldots i_J) \in \mathcal{M}^J \\ i_j = i_j^*}} \frac{Y_1(i_1) \times \cdots \times Y_J(i_J)}{(\mathbb{1}' \boldsymbol{Y})^{J-1}} \\ &= Y_j(i_j^*) \frac{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{J} \sum_{i_l=1}^{I_l} Y_l(i_l)}{(\mathbb{1}' \boldsymbol{Y})^{J-1}} \\ &= Y_j(i_j^*). \end{aligned}$$

De plus nous avons :

$$\log \hat{\mu}_{i_1 \ldots i_J} = -(J-1) \log(\mathbb{1}' \boldsymbol{Y}) + \log Y_1(i_1) + \cdots + \log Y_J(i_J),$$

ce qui équivaut à :

$$\log \hat{\boldsymbol{\mu}} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}' \\ \mathbb{1}_1'(1) \\ \vdots \\ \mathbb{1}_1'(I_1) \\ \mathbb{1}_2'(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbb{1}_J'(I_J) \end{bmatrix}' \begin{pmatrix} -(J-1) \log(\mathbb{1}' \boldsymbol{Y}) \\ \log Y_1(1) \\ \vdots \\ \log Y_1(I_1) \\ \log Y_2(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \log Y_J(I_J) \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} -(J-1) \log(\mathbb{1}' \boldsymbol{Y}) \\ \log Y_1(1) \\ \vdots \\ \log Y_1(I_1) \\ \log Y_2(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \log Y_J(I_J) \end{pmatrix},$$

d'où on déduit que :

$$\log \hat{\boldsymbol{\mu}} \in \mathcal{F}.$$

Par suite, d'après le lemme 3, $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ est l'unique EMV du modèle.Inversement, montrons l'implication $(A2) \Rightarrow (A1)$. Soit $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ l'EMV du modèle, alors toutes ses composantes sont strictement positives, et, d'après le lemme 3, il vérifie l'équation (13); c'est-à-dire $X' \boldsymbol{Y} = X' \hat{\boldsymbol{\mu}}$. Ce qui équivaut à :

$$Y_j(i_j^*) = \boldsymbol{Y}' \mathbb{1}_j(i_j^*) = \hat{\boldsymbol{\mu}}' \mathbb{1}_j(i_j^*) = \hat{\mu}_j(i_j^*), \ \ i_j^* \in \{1, \ldots, I_j\}, \ \ j \in \{1, \ldots, J\}.$$

Comme $\hat{\boldsymbol{\mu}} > \mathbf{0}$ (c.-à-d. $\forall j \in \{1, \ldots, J\}$, et $\forall i_j \in \{1, \ldots, I_j\}$ $\hat{\mu}_{i_1 \ldots i_J} > 0$), on a alors $Y_j(i_j^*) > 0$, pour $i_j^* \in \{1, \ldots, I_j\}$, $j \in \{1, \ldots, J\}$. Ce qui termine la preuve de l'équivalence $(A1) \Leftrightarrow (A2)$.

L'équivalence $(A2) \Leftrightarrow (A3)$ est une conséquence immédiate de l'identifiabilité du modèle sous les contraintes (5). En effet nous avons :

$$\begin{aligned} \log \hat{\mu}_{i_1 \ldots i_J} &= \log Y_1(i_1) + \cdots + \log Y_J(i_J) - (J-1) \log(\mathbb{1}' \boldsymbol{Y}) \\ &= \frac{1}{I_1} \sum_{i_1^*=1}^{I_1} \log Y_1(i_1^*) + \cdots + \frac{1}{I_J} \sum_{i_J^*=1}^{I_J} \log Y_J(i_J^*) - (J-1) \log(\mathbb{1}' \boldsymbol{Y}) \\ &\quad + \log Y_1(i_1) - \frac{1}{I_1} \sum_{i_1^*=1}^{I_1} \log Y_1(i_1^*) + \cdots + \log Y_J(i_J) - \frac{1}{I_J} \sum_{i_J^*=1}^{I_J} \log Y_J(i_J^*) \\ &= \hat{m} + \hat{\alpha}_{i_1}^{(1)} + \cdots + \hat{\alpha}_{i_J}^{(J)}, \end{aligned}$$

puisque :

$$\forall j \in \{1,\ldots,J\},\ \sum_{i=1}^{I_j} \hat{\alpha}_i^{(j)} = 0.$$

Ce qui termine la preuve du théorème 2. □

Preuve du Théorème 3

Montrons l'implication $(B1) \Rightarrow (B2)$. Supposons que pour tout $j \in \{1,\ldots,J\}$ et tout $i_j^* \in \{1,\ldots,I_j\}$, $S_j(i_j^*) > 0$. On pose $\hat{\boldsymbol{\mu}}$, le vecteur de coordonnées $\hat{\mu}_{i_1\ldots i_J}$, $i_j \in \{1\ldots I_j\}$, $j \in \{1,\ldots J\}$, avec :

$$\hat{\mu}_{i_1\ldots i_J} = \frac{S_1(i_1)\times\cdots\times S_J(i_J)}{K_{i_1\ldots i_J}(\mathbb{1}'\boldsymbol{S})^{J-1}} = \frac{S_1(i_1)\times\cdots\times S_J(i_J)}{\kappa_{i_1}^{(1)}\times\ldots\times\kappa_{i_J}^{(J)}(\mathbb{1}'\boldsymbol{S})^{J-1}} > 0.$$

Le vecteur $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ vérifie l'équation :

$$X'\boldsymbol{S} = X' D_{\boldsymbol{K}}\hat{\boldsymbol{\mu}}.$$

En effet, comme pour tout $j \in \{1,\ldots,J\}$, $\sum_{i_j=1}^{I_j} S_j(i_j) = \mathbb{1}'\boldsymbol{S}$, nous avons, pour tout $j \in \{1,\ldots,J\}$ et tout $i_j^* \in \{1,\ldots,I_j\}$:

$$\begin{aligned}(D_{\boldsymbol{K}}\hat{\boldsymbol{\mu}})_j(i_j^*) &= \mathbb{1}_j'(i_j^*)D_{\boldsymbol{K}}\hat{\boldsymbol{\mu}} = \sum_{\substack{(i_1\ldots i_J)\in\mathcal{M}^J\\ i_j=i_j^*}} K_{i_1\ldots i_J}\hat{\mu}_{i_1\ldots i_J} = \sum_{\substack{(i_1\ldots i_J)\in\mathcal{M}^J\\ i_j=i_j^*}} \frac{S_1(i_1)\times\cdots\times S_J(i_J)}{(\mathbb{1}'\boldsymbol{S})^{J-1}}\\ &= S_j(i_j^*)\frac{\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{J}\sum_{i_l=1}^{I_l} S_l(i_l)}{(\mathbb{1}'\boldsymbol{S})^{J-1}} = S_j(i_j^*),\end{aligned}$$

et, comme $X = [\mathbb{1}\ \mathbb{1}_1(1)\ldots\mathbb{1}_1(I_1)\ \mathbb{1}_2(1)\ldots\mathbb{1}_2(I_2)\ldots\mathbb{1}_J(1)\ldots\mathbb{1}_J(I_J)]$, nous en déduisons :

$$X'\boldsymbol{S} = X'D_{\boldsymbol{K}}\hat{\boldsymbol{\mu}} \Longleftrightarrow (D_{\boldsymbol{K}}\hat{\boldsymbol{\mu}})_j(i_j^*) = S_j(i_j^*),\ \ i_j^* \in \{1,\ldots,I_j\}, j \in \{1,\ldots,J\}.$$

De plus, pour tout $j \in \{1,\ldots,J\}$ et pour tout $i_j \in \{1,\ldots,I_j\}$, nous avons :

$$\begin{aligned}\log(\hat{\mu}_{i_1\ldots i_J}) &= -(J-1)\log(\mathbb{1}'\boldsymbol{S}) - \log K_{i_1\ldots i_J} + \log S_1(i_1) + \cdots + \log S_J(i_J)\\ &= -(J-1)\log(\mathbb{1}'\boldsymbol{S}) + \big(\log S_1(i_1) - \log(\kappa_{i_1}^{(1)})\big) + \cdots + \big(\log S_J(i_J) - \log(\kappa_{i_J}^{(J)})\big),\end{aligned}$$

ce qui équivaut à :

$$\log\hat{\boldsymbol{\mu}} = \begin{bmatrix}\mathbb{1}'\\ \mathbb{1}_1'(1)\\ \vdots\\ \mathbb{1}_1'(I_1)\\ \vdots\\ \mathbb{1}_J'(I_J)\end{bmatrix}' \begin{pmatrix}-(J-1)\log(\mathbb{1}'\boldsymbol{S})\\ \log S_1(1) - \log\kappa_1^{(1)}\\ \vdots\\ \log S_1(I_1) - \log\kappa_{I_1}^{(1)}\\ \vdots\\ \log S_J(I_J) - \log\kappa_{I_J}^{(J)}\end{pmatrix} = X\begin{pmatrix}-(J-1)\log(\mathbb{1}'\boldsymbol{S})\\ \log S_1(1) - \log\kappa_1^{(1)}\\ \vdots\\ \log S_1(I_1) - \log\kappa_1^{(1)}\\ \vdots\\ \log S_J(I_J) - \log\kappa_{I_J}^{(J)}\end{pmatrix},$$

d'où on déduit que :

$$\log\hat{\boldsymbol{\mu}} \in \mathcal{F}.$$

Par suite, d'après le lemme 3, $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ est l'unique EMV du modèle PM.Inversement, montrons maintenant l'implication $(B2) \Rightarrow (B1)$. Soit $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ l'EMV du modèle, alors toutes ses composantes sont strictement positives, et, d'après le lemme 3, il vérifie l'équation $X'\boldsymbol{S} = X'D_{\boldsymbol{K}}\hat{\boldsymbol{\mu}}$. Or en utilisant l'expression de la matrice X donnée dans (7), on montre que cette dernière équation est équivalente à :

$$S_j(i_j^*) = \boldsymbol{S}'\mathbb{1}_j(i_j^*) = (D_{\boldsymbol{K}}\hat{\boldsymbol{\mu}})'\mathbb{1}_j(i_j^*),\ i_j^* \in \{1,\ldots,I_j\},\ \ j \in \{1,\ldots,J\}.$$

Comme on a $D_{\boldsymbol{K}}\hat{\boldsymbol{\mu}} > \mathbf{0}$, (c'est-à-dire pour tout $j \in \{1,\ldots,J\}$ et pour tout $i_j \in \{1,\ldots,I_j\}, K_{i_1\ldots i_J}\hat{\mu}_{i_1\ldots i_J} > 0$), alors on en déduit :

$$S_j(i_j^*) > 0,\ \ i_j^* \in \{1,\ldots,I_j\},\ \ j \in \{1,\ldots,J\}.$$

Ce qui complète la preuve de l'équivalence entre $(B1)$ et $(B2)$.

L'équivalence entre $(B2)$ et $(B3)$ est elle une conséquence immédiate de l'identifiabilité du modèle. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned}
\log \hat{\mu}_{i_1\ldots i_J} &= \log \frac{S_1(i_1)}{\kappa^{(1)}_{i_1}} + \cdots + \log \frac{S_J(i_J)}{\kappa^{(J)}_{i_J}} - (J-1)\log(\mathbb{1}'\boldsymbol{S}) \\
&= \frac{1}{I_1}\sum_{i_1^*=1}^{I_1} \log \frac{S_1(i_1^*)}{\kappa^{(1)}_{i_1}} + \cdots + \frac{1}{I_J}\sum_{i_J^*=1}^{I_J} \log \frac{S_J(i_J^*)}{\kappa^{(J)}_{i_J}} - (J-1)\log(\mathbb{1}'\boldsymbol{S}) \\
&\quad + \log \frac{S_1(i_1)}{\kappa^{(1)}_{i_1}} - \frac{1}{I_1}\sum_{i_1^*=1}^{I_1} \log \frac{S_1(i_1^*)}{\kappa^{(1)}_{i_1^*}} + \cdots + \log \frac{S_J(i_J)}{\kappa^{(J)}_{i_J}} - \frac{1}{I_J}\sum_{i_J^*=1}^{I_J} \log \frac{S_J(i_J^*)}{\kappa^{(J)}_{i_J^*}} \\
&= \hat{m} + \hat{\alpha}^{(1)}_{i_1} + \cdots + \hat{\alpha}^{(J)}_{i_J},
\end{aligned}$$

puisque :

$$\forall j \in \{1,\ldots,J\},\ \sum_{i=1}^{I_j} \hat{\alpha}^{(j)}_i = 0.$$

Ce qui termine la preuve du théorème 3. □

Preuve du Théorème 4

Cette équivalence est une conséquence du fait que le modèle avec répétitions a une vraisemblance proportionnelle à celle d'un modèle sans répétition.

Pour une série d'observations $y_{i_1\ldots i_J,k}$, $k \in \{1,\ldots,K_{i_1\ldots i_J}\}$, $i_j \in \{1,\ldots,I_j\}$, $j \in \{1,\ldots,J\}$, la fonction de vraisemblance du modèle de Poisson multiplicatif avec répétitions s'écrit :

$$L_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{\mu}) = \prod_{j=1}^{J}\prod_{i_j}^{I_j}\prod_{k=1}^{K_{i_1\ldots i_J}} \frac{\mu_{i_1\ldots i_J}^{y_{i_1\ldots i_J,k}}}{y_{i_1\ldots i_J,k}!} e^{-\mu_{i_1\ldots i_J}} = \prod_{j=1}^{J}\prod_{i_j}^{I_j}\left(\frac{\mu_{i_1\ldots i_J}^{s_{i_1\ldots i_J}} e^{-K_{i_1\ldots i_J}\mu_{i_1\ldots i_J}}}{\prod_{k=1}^{K_{i_1\ldots i_J}} y_{i_1\ldots i_J,k}!}\right).$$

Nous pouvons aussi considérer ce modèle comme un modèle sans répétition. Pour ce faire nous sommons les observations dans chaque groupe. Rappelons d'abord que $S_{i_1\ldots i_J} = \sum_{k=1}^{K_{i_1\ldots i_J}} Y_{i_1\ldots i_J,k} \sim \mathcal{P}(K_{i_1\ldots i_J}\mu_{i_1\ldots i_J}),\ : (i_1\ldots i_J) \in \mathcal{M}^J$.

La fonction de vraisemblance du modèle ainsi considéré est donnée par :

$$L_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{\mu}) = \prod_{j=1}^{J}\prod_{i_j}^{I_j} \frac{(K_{i_1\ldots i_J}\mu_{i_1\ldots i_J})^{s_{i_1\ldots i_J}}}{s_{i_1\ldots i_J}!} e^{-K_{i_1\ldots i_J}\mu_{i_1\ldots i_J}}.$$

On remarque alors que les deux fonctions de vraisemblance $L_{\boldsymbol{s}}$ et $L_{\boldsymbol{y}}$ sont proportionnelles. De la sorte, nous aurons les mêmes conditions d'existence et d'unicité de l'EMV pour les deux modèles. Or, d'après le théorème 2, une condition nécessaire et suffisante d'existence et d'unicité de l'EMV du modèle sur les données groupées est :

$$S_j(i_j^*) > 0,\ i_j^* \in \{1,\ldots,I_j\},\ j \in \{1,\ldots,J\}.$$

Ce qui complète la preuve du théorème 4. □

Acknowledgment
Nous remercions l'arbitre pour ses commentaires et suggestions qui nous ont permis d'améliorer la présentation de notre article.

References

[1] Barndorff-Nielsen, O.E., 1978. **Information and Exponential Families in Statistical Theory**. John Willey and Sons, Chichester.
[2] Berk, R.H., 1972. Consistency and asymptotic normality of MLE's for exponential models. *Ann. Math. Statist.*, **43**(1), 193-204.
[3] Bickel, P., Doksum K., 2001. Mathematical Statistics. Basic Ideas and Selected Topics, volume I. Prentice Hall.
[4] Cameron, A.C., Trivedi, P.K., 1998. **Regression Analysis of Count Data**. Cambridge university press, New York .

[5] Charpentier, A., Denuit, M., 2005. **Mathématiques de l'Assurance Non-vie Tome 2**. Economica, Paris.

[6] Christensen, R., 1990. **Log Linear Models**. Springer-Verlag, New York.

[7] Gning, L.D., 2010. Utilisation des mélanges de lois de Poisson et de lois binomiales négatives pour établir des tarifs a priori et a posteriori en assurance non vie. Thèse de mathématiques en préparation, Université G. Berger Saint-Louis, Sénégal et Université Pierre et Marie Curie, Paris, France.

[8] Haberman, S.J., 1973. Log-linear models for frequency data : sufficient statistics and likelihood equations. *Ann. Statist.* **1**, 617-632.

[9] Haberman, S.J., 1977. Maximum likelihood estimates in exponential response mo-dels.*Ann. Statist.* **5**, 815-841.

[10] Hilbe, J.M., 2007. Negative Binomial Regression. Cambridge University Press, Cambridge.

[11] Mc Cullagh, P., Nelder, J.A., 1989. Generalized Linear Models. *Chapman and Hall*, New York.

[12] Partrat, C., Besson L., 2004. Assurance Non-vie Modélisation, simulation. *Economica*, Paris.

[13] Santner, T.J., Duffy E.D., 1989. **The Statistical Analysis of Discrete Data**. Springer-Verlag, New York.

[14] Wedderburn, R.W.M., 1976. On the existence and uniqueness of the maximum likelihood estimates of certain generalized linear models. *Biometrika* **63**, 27-32.